TRƯỜNG ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LƯU HOÀNG ANH

BINOID VÀ ĐẠI SỐ BINOID

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LƯU HOÀNG ANH

BINOID VÀ ĐẠI SỐ BINOID

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số
Mã số: 84.60.104

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. TRẦN NGUYÊN AN

THÁI NGUYÊN - 2020

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi. Tôi không sao chép từ bất kỳ một công trình nghiên cứu nào khác.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 6 năm 2020

Người viết luận văn

Lưu Hoàng Anh

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của TS Trần Nguyên An - giảng viên khoa Toán Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy, người đã hướng dẫn tôi cách đọc tài liệu, nghiên cứu khoa học đúng đắn, tinh thần làm việc nghiêm túc và đã dành nhiều thời gian, công sức giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo của Viện Toán học và Đại học Thái Nguyên những người đã tận tình giảng dạy và khích lệ, động viên tôi vượt qua những khó khăn trong học tập.

Tôi xin cảm ơn Ban lãnh đạo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Khoa Sau đại học đã tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian tôi học tập.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn bạn bè, đồng nghiệp, người thân đã giúp đỡ, động viên, ủng hộ tôi để tôi có thể hoàn thành tốt luận văn cũng như khóa học của mình.

Thái nguyên, ngày 10 tháng 6 năm 2020

Người viết Luận văn

Lưu Hoàng Anh

Mục lục

MỞ ĐẦU

Năm 2015, Simone Bottger trong luận án tiến sĩ của mình “Monoids with absorbing elements and their associated algebras” [3] đã giới thiệu khái niệm binoid và đại số binoid mở rộng, khái niệm vị nhóm, đại số vị nhóm: Cho R là vành giao hoán, cho M là một vị nhóm với phép cộng. Phần tử $a \in M$ thỏa mãn $a + b = a$, với mọi $b \in M$ được gọi là phần tử hút (absorbing element). Phần tử như vậy nếu tồn tại là duy nhất và được ký hiệu là ∞. Một vị nhóm có phần tử hút được gọi là *một binoid*. Đại số kết hợp với binoid được gọi là *đại số binoid* của M, ký hiệu là $R[M]$ và được xác định là đại số thương

$$R[M] := RM/(X^{\infty}),$$

trong đó $RM = \bigoplus_{a \in M} RX^a$ là đại số vị nhóm, (X^{∞}) là iđêan của RM sinh bởi X^{∞}. Như vậy, đại số binoid là mở rộng của đại số vị nhóm. Đại số binoid là vành thương của đại số đa thức bởi iđêan đơn thức hoặc iđêan nhị thức sinh bởi các nhị thức thuần túy (pure difference binomial). Nhắc lại giả sử $S = R\left[x_1, \ldots, x_n\right]$, $n \geq 1$ là vành đa thức, đa thức dạng $x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_n^{a_n}, a_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1, n}$ được gọi là một đơn thức, đa thức dạng

$$ax_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_n^{a_n} - bx_1^{b_1} x_2^{b_2} ... x_n^{b_n}; a, b \in R, a_i, b_i \in \mathbb{N}$$

được gọi là một nhị thức, nhị thức mà $a, b \in \{0; 1\}$ gọi là nhị thức thuần túy. Các đại số binoid là đối tượng chính trong Tổ hợp, Đại số giao hoán và hình học đại số. Các đại số phải kể đến là: Vành tọa độ của đa tạp affin (xạ ảnh), vành Stanley-Reisner, vành Toric.

Mục đích của luận văn là tìm hiểu về binoid và đại số binoid theo hai tài liệu chính [2], [3].

Luận văn bao gồm 2 chương.

Chương 1 tìm hiểu về binoid, đồng cấu binoid, tập sinh binoid, một số lớp binoid đặc biệt, tích smash, tác động binoid trên tập định điểm, địa phương hóa và iđêan trong binoid giao hoán.

Chương 2 tìm hiểu về đại số và đại số binoid, iđêan trong đại số binoid, cấu trúc môđun của đại số.

Chương 1

Binoid

1.1. Binoid và đồng cấu binoid

Phần này giới thiệu định nghĩa binoid và một số tính chất của binoid. Trong luận văn ta luôn quy ước R là vành giao hoán có đơn vị.

Định nghĩa 1.1.1. (1) Một *nửa nhóm* $(M, *)$ là một tập hợp M và phép toán $*$ kết hợp.

$$* : M \times M \to M \quad (a, b) \mapsto a * b$$

Một *vị nhóm* $(M, *, e)$ là một nửa nhóm tồn tại phần tử e thỏa mãn

$$a * e = e * a = a \text{ với mọi } a \in M.$$

Một phần tử như vậy được gọi là *phần tử đơn vị* của M và phần tử đơn vị luôn là duy nhất.

(2) Một *vị nhóm con* của vị nhóm M là một nửa nhóm con có chứa phần tử đơn vị của M. Trong phép toán cộng, phần tử đơn vị sẽ được ký hiệu là 0 và trong phép toán nhân ta ký hiệu là 1.

(3) Một phần tử $a \in M$ trong nửa nhóm là *phần tử hút* (absorbing) nếu $a * x = x * a = a$ với mọi $x \in M$. Một phần tử hút luôn là duy nhất nếu tồn tại.

(4) Một *binoid* $(M, *, e, a)$ (*nửa binoid* $(M, *, a)$) là một vị nhóm (hay nửa nhóm) với một phần tử hút a. Một *binoid con* (*nửa binoid con*) của M là một vị nhóm con (hay nửa nhóm con) của M chứa phần tử hút của M. Trong phép toán cộng, phần tử hút sẽ được ký hiệu bằng ∞ và trong phép toán nhân ta ký hiệu là 0. Theo định nghĩa, nửa binoid và vị nhóm luôn là tập khác rỗng, đặc biệt các *binoid* cũng vậy.

Ta ký hiệu tập các binoid là B và tập các binoid giao hoán là $\operatorname{com} B$.

Trong suốt luận văn này, nếu không nói gì thêm thì mọi binoid sẽ được trang bị phép toán cộng (kể cả binoid không giao hoán). Hơn nữa, trừ khi có sự nhầm lẫn, chúng ta viết tắt là:

$$na = a + \ldots + a \text{ và } nA = \{a_1 + \ldots + a_n \mid a_i \in A\},$$

với $n \in \mathbb{N}, a \in M, A \subseteq M, 0a = 0$ và $0A = \varnothing$.

Ví dụ 1.1.2.

(1) Binoid $\{\infty\}$, tức là $0 = \infty$ được gọi là *binoid không* và binoid $\{0, \infty\}$ được gọi là *binoid tầm thường*

(2) Thêm phần tử hút ∞ vào vị nhóm giao hoán $(\mathbb{N}^n, +, (0, \ldots, 0)), n \geq 1$, bằng cách xác định $k + \infty = \infty$ tạo ra một binoid, ký hiệu là $(\mathbb{N}^n)^\infty$.

(3) Cho $(R, +, \cdot)$ là một vành. Khi đó $(R, \cdot)$ là một binoid.

Ví dụ 1.1.3. Cho V là tập tùy ý. Tập lũy thừa $P(V)$ là tập các tập con của V. Khi đó ta có hai binoid sau:

$$P(V)_\cap = (P(V), \cap, V, \varnothing) \text{ và } P(V)_\cup = (P(V), \cup, \varnothing, V)$$

Ta có $P(\varnothing)$ tạo ra binoid không và $P(\{1\})$ là binoid tầm thường. Nếu V là hữu hạn, chúng ta viết tắt $P(\{1, \ldots, n\}) = P_n, n \geq 1$ và viết $P_{n,\cap}$ và $P_{n,\cup}$ cho các binoid tương ứng. Các binoid con của $P(V)_\cap$ và $P(V)_\cup$ được cho bởi các tập hợp con $M \subseteq P(V)$ chúng là đóng đối với phép toán $\cup$ và $\cap$, lần lượt chứa $\varnothing$ và V. Nếu M là một binoid con của $P(V)_\cup$ (tương ứng $P(V)_\cap$), thì

$$M^c = \{U^c \mid U \in M\},$$

trong đó $U^c = V \setminus U$ là phần bù của U, là một binoid con của $P(V)_\cap$ (tương ứng $P(V)_\cup$) vì $U^c \cup W^c = (U \cap W)^c$ (tương ứng $U^c \cap W^c = (U \cup W)^c$) với mọi $U,\ W \subseteq P(V)$. Đặc biệt, mọi topo $\mathcal{T} = \{U \mid U \subseteq V \text{ mở}\}$ trên tập khác rỗng V xác định các binoid giao hoán liên quan đến phép hợp và phép giao, cụ thể là $(\mathcal{T}, \cap, V, \varnothing) = \mathcal{T}_\cap$ và $(\mathcal{T}, \cup, \varnothing, V) = \mathcal{T}_\cup$, cũng như tập hợp tất cả các tập đóng $\mathcal{T}^c = \{U^c \mid U \in \mathcal{T}\}$. Các binoid $P(V)_\cup$ và $P(V)_\cap$ sinh từ tôpô rời rạc trên V và binoid do tôpô tầm thường trên V chính là binoid tầm thường $\{V, \varnothing\}$.

Định nghĩa 1.1.4. Nửa binoid và vị nhóm thành lập bằng thêm một phần tử hút và một phần tử đơn vị vào một nửa nhóm M sẽ được ký hiệu lần lượt là M^∞ và M^0. Nếu M chứa phần tử hút, chúng ta viết $M^\bullet = M \setminus \{\infty\}$.

Định nghĩa 1.1.5. Một *tập định điểm (pointed set)* (S, p) là tập S có phần tử đặc biệt $p \in S$. Một ánh xạ $(S, p) \to (T, q)$ của các tập hợp điểm với $p \mapsto q$ được gọi là *ánh xạ định điểm (pointed map)*. Tập hợp tất cả các ánh xạ định điểm $S \to T$ sẽ được ký hiệu là $\operatorname{map}_{p\mapsto q}(S, T)$. Trong trường hợp $T = S$ và $p = q$, chúng ta chỉ cần viết $\operatorname{map}_p S$. Tập $\operatorname{map}_p S$ là một binoid với phép hợp thành ánh xạ $S \to S$. Phần tử đơn vị được cho bởi id_S và phần tử hút xác định bởi ánh xạ không đổi $c_p : s \mapsto p,\ s \in S$.

Trong phần tiếp theo, chúng ta sẽ chỉ ra rằng mọi binoid có thể nhúng vào một binoid gồm các ánh xạ

$$\left(\operatorname{map}_p S, \circ, \mathrm{id}_S, c_p\right).$$

Đặc biệt, ta có một tập hợp M là một vị nhóm nếu và chỉ nếu nó là một nửa nhóm định điểm $(M, 0)$ với tính chất bổ sung của phần tử đơn vị 0. Tương tự, nửa binoid M là một nửa nhóm định điểm (M, ∞) với tính chất xác định của ∞. Khi quan sát điều này, một binoid M có thể được coi là một tập hợp định điểm (M, p) theo hai cách khác nhau: Một tập hợp định điểm với $p = 0$ hoặc như một tập hợp định điểm với $p = \infty$.

Tích và tổng trực tiếp của một họ $(S_i, p_i)_{i\in I}$ của các tập định điểm cũng là một tập định điểm với phần tử $(p_i)_{i\in I}$ và chúng trùng nhau nếu và chỉ nếu I là hữu hạn; trong trường hợp này, chúng ta ký hiệu $\bigoplus_{i\in I} S_i$ thay vì $\prod_{i\in I} S_i$. Tương tự các cấu trúc khác, ta có các khái niệm tổng, tích các binoid.

Định nghĩa 1.1.6. Cho M và N là binoids (hoặc nửa binoid). Một ánh xạ $\varphi : M \to N$ là một *đồng cấu binoid (nửa binoid)* nếu nó là một đồng cấu (nửa nhóm) và $\varphi(\infty_M) = \infty_N$. Hơn nữa, chúng ta gọi φ là một *đơn cấu* hoặc *phép nhúng* nếu nó là đơn ánh, là một *toàn cấu* nếu nó là toàn ánh, là một *đẳng cấu* nếu nó là song ánh, khi đó ta viết $M \cong N$. Tập $\operatorname{im}\varphi = \varphi(M)$ là *ảnh* của φ và tập $\ker(\varphi) = \{a \in M \mid \varphi(a) = \infty_N\}$ là *hạt nhân* của φ . Tập hợp tất cả các đồng cấu binoid từ M đến N được ký hiệu là $\hom(M, N)$